

Methode der hybriden FEM-Elemente bei der Plattenberechnung

Im Programm PLT werden Platten des allgemeinen Hochbaus mit Hilfe sogenannter "hybrider" Elemente berechnet. Durch die aus dem Lateinischen stammende Bezeichnung "hybrid" wird auf vielen Fachgebieten darauf hingewiesen, dass eine Sache durch die Synthese vorteilhafter Eigenschaften anderer Dinge diese gewünschten Qualitäten vereinigt. Welche Vorteile die hybriden Elemente vereinigen, wird im Folgenden erläutert.

Die Gleichungen der Plattenbiegung sind die Grundlage für das Verständnis unterschiedlicher Lösungsansätze für finite Plattenelemente. Aus diesem Grund werden hier zunächst die wesentlichen Gleichungen skizziert.

1 Kirchhoffsche Plattentheorie

Mit den üblichen Voraussetzungen der Plattentheorie [1]

- kleine Durchbiegungen
- dünne Platte

können die Normalspannungen und -dehnungen senkrecht zur Plattenebene vernachlässigt werden, $\sigma_{zz} = 0$ und $\varepsilon_{zz} = 0$.

Weiter kann angenommen werden, dass ebene Querschnittsflächen, die im unverformten Zustand normal zur Mittelebene stehen, im verformten Zustand normal zur verformten Mittelfläche bleiben, d.h. die transversalen Schubverzerrungen können vernachlässigt werden, $\gamma_{yz} = 0$ und $\gamma_{zx} = 0$.

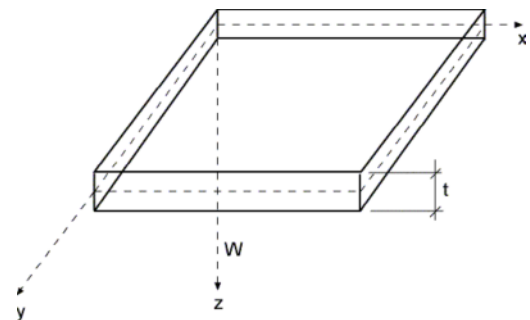


Abb. 1: Platte mit Koordinatensystem x, y, z , Dicke t und Durchbiegung w

1.1 Kinematik

Der Verschiebungs- und Verformungszustand einer Platte wird eindeutig durch die Durchbiegung beschrieben,

$$w = w(x,y) \quad (1).$$

Als Verzerrungsgrößen ergeben sich aus den zweiten Ableitungen der Durchbiegung die Krümmungen,

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2A), \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2B) \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \kappa_{yx} \quad (2C).$$

Die Krümmungen werden für die weitere Verwendung im Krümmungsvektor zusammengefasst,

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (3).$$

1.2 Kinetik

Als resultierende Schnittgrößen ergeben sich durch Integration der entsprechenden Spannungen über die Plattendicke t die Momente pro Längeneinheit

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} s_{xx} z \, dz \quad (4A), \quad m_y = \int_{-t/2}^{t/2} s_{yy} z \, dz \quad (4B),$$

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} s_{xy} z \, dz = \int_{-t/2}^{t/2} s_{yx} z \, dz = m_{yx} \quad (4C).$$

Der im Weiteren verwendete Momentenvektor lautet damit

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} \quad (5).$$

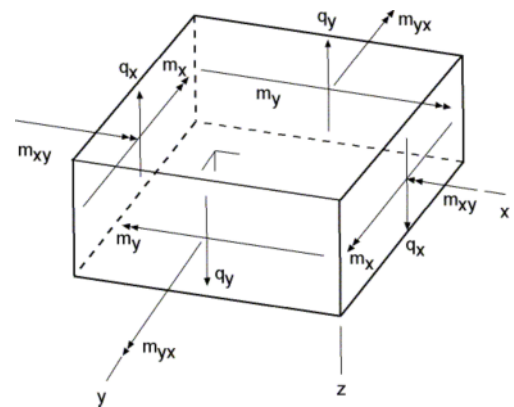


Abb. 2: Element mit Schnittgrößen

Aus der Kräfte-Gleichgewichtsbedingung in der z -Richtung und den Momenten-Gleichgewichtsbedingungen um die x - bzw. y - Achse folgen

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \hat{q} = 0 \quad (7A) \text{ mit der verteilten Querbelastung } \hat{q} = \hat{q}(x,y),$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0 \quad (7B) \quad \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial y^2} \quad (8B)$$

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - q_y = 0 \quad (7C) \quad \frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \quad (8C).$$

Aus dem Defizit der Kirchhoffschen Plattentheorie, dass den Querkräften q_x und q_y keine entsprechenden Schubverzerrungen gegenüberstehen, folgt, dass die Querkräfte keine unabhängigen Größen sind. Substitution der Querkräfte durch die partiellen Ableitungen der Momente in der Kräfte-Gleichgewichtsbedingung (7A) liefert

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + \hat{q} = 0 \quad (9)$$

1.3 Elastizitätsgesetz

Als konstitutive Gleichung lauten die Momenten-Krümmungs-Beziehungen in Matrizen-Schreibweise kurz

$$m = E\kappa \quad (10)$$

Darin bedeutet E die Elastizitätsmatrix der Platte,

$$E = K \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (11) \text{ mit der Biegesteifigkeit } K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (12),$$

dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnzahl ν .

Ersetzt man in der Kräfte-Gleichgewichtsbedingung (7A) die Momente durch die Krümmungen und weiter durch die zweiten Ableitungen der Durchbiegung (2) ergibt sich die biharmonische Differenzialgleichung 4. Ordnung,

$$K \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \hat{q} \quad (13)$$

2 Prinzip vom Minimum der potenziellen Energie

Bei der Herleitung von FE-Formulierungen wird überwiegend vom Prinzip des Minimums der potenziellen Energie ausgegangen. Mit der Verformungsenergie

$$U = \frac{1}{2} \iint \kappa^T E \kappa \, dx dy = \frac{1}{2} K \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

und dem Potenzial der äußeren verteilten Querbelastung

$$V = - \iint \hat{q} w \, dx dy$$

beträgt die gesamte potenzielle Energie

$$P = U + V .$$

Der Einfachheit wegen sind hier keine Anteile aus Randlasten oder in Folge von Temperaturendeckung oder Vorspannung angegeben. Die potenzielle Energie der Platte hängt allein von ihrer Durchbiegung $w = w(x,y)$ und deren zweiten partiellen Ableitungen ab. Zulässige Funktionen für die Durchbiegung müssen stetig sein und mindestens stetige erste Ableitungen haben. Im Sinn der Energie- und Variationsmethoden der Mechanik stellt P ein Funktional dar. Im Unterschied zu einer einfachen Funktion bestehen die Argumente eines Funktionals nicht aus Variablen, sondern aus Funktionen und deren Ableitungen. Mit der ersten Variation $\delta \Pi = 0$ und der zweiten Variation $d^2 P > 0$ kann man zeigen, dass sich im Gleichgewichtszustand unter allen kinematisch zulässigen Verschiebungszuständen die Durchbiegungen so einstellen, dass P den kleinsten Wert annimmt [2, 3].

2.1 FE-Diskretisierung

Die FE-Methode löst das Kontinuum der Platte auf in ein Netz von finiten Elementen. Die Elemente sind an ihren Eckpunkten über Knoten verbunden. In einem reinen Plattensystem genügen nur drei Freiheitsgrade pro Knoten: die vertikale Verschiebung (die Durchbiegung) und zwei senkrecht zueinander stehende Verdrehungen (die Neigungen). Die Freiheitsgrade oder Verschiebungsgrößen werden als Vektoren zusammengefasst,

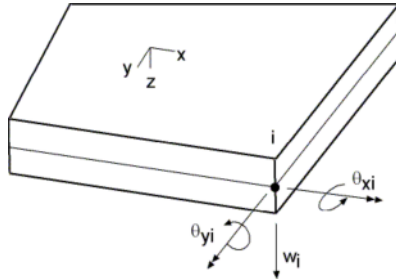


Abb. 3: Viereckselement mit den Freiheitsgraden des i-ten Knotens

$$q_i = \begin{bmatrix} w_i \\ q_{x_i} \\ q_{y_i} \end{bmatrix} \quad \text{für den } i\text{-ten Knoten und } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \text{für alle } n \text{ Knoten eines Elements.}$$

Für die Durchbiegung werden elementweise Interpolationspolynome als Funktion der Knotenfreiheitsgrade gesucht. Dazu wird jedem Freiheitsgrad eine Verschiebungsansatz zugeordnet. Für den i-ten Knoten werden die Ansatzfunktionen in einem Vektor N_i zusammengefasst,

$$N_i = \begin{bmatrix} N_{w_i}(x, y) \\ N_{q_{x_i}}(x, y) \\ N_{q_{y_i}}(x, y) \end{bmatrix}$$

Das Verschiebungsfeld eines Elements mit n Knoten lässt sich damit wie folgt angeben,

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) q_i$$

Damit an den Rändern zwischen den Elementen keine Lücken und Knicke (in einem Knick werden die Krümmung und damit das Moment unendlich groß) auftreten, müssen zulässige Ansatzfunktionen nicht nur stetig, sondern auch noch stetig differenzierbar sein. Wie sich zeigt, ist die kinematische Kompatibilität zwischen den Elementen außerordentlich schwer zu erreichen. Der Grund besteht darin, dass, z.B. im Unterschied zu Scheiben- oder Volumenelementen, nicht nur die Ansatzfunktionen selbst stetig sein müssen, sondern in Form der ersten Ableitungen auch die Querschnittsneigungen. Diese Schwierigkeit hat in der Folge eine nahezu unüberschaubare Zahl von FE-Formulierungen auf dem Gebiet der Plattenbiegung hervorgebracht. Eine kurze Übersicht der Lösungen wird im Folgenden vorgestellt.

2.2 Verschiebungselemente

Für Dreieckselemente mit drei Knoten und 9 Freiheitsgraden und Viereckselemente mit vier Knoten und 12 Freiheitsgraden lassen sich höchstens 9-parametrische bzw. 12-parametrische Ansatzfunktionen bestimmen. Es lässt sich zeigen, dass keine einfachen Polynomausdrücke existieren, die sowohl allein durch die Freiheitsgrade der Eckknoten zu bestimmen sind als auch die Interelementkompatibilität erlauben [4, 5, 6].

Die Dreieckselemente der ersten Generation besitzen Ansatzfunktionen mit zwischen 10 und 21 Parametern. Mit diesen Lösungen können entweder die Verträglichkeitsbedingung zwischen den Elementen nicht erfüllt werden oder die Bestimmung der Ansatzparameter erfordern in Form von "Knotenverkrümmungen" zusätzliche Knotenfreiheitsgrade. Die anfänglichen Viereckselemente waren, abgesehen von den Schwierigkeiten der Dreieckselemente, nur auf die Rechteckform beschränkt. Moderne Verschiebungselemente verwenden sehr aufwendige und komplizierte Ansatzfunktionen mit einer Vielzahl von Parametern bis hin zu gebrochen rationalen Funktionen. Diese erweiterten Ansatzfunktionen sind nur mit zusätzlichen Freiheitsgraden bestimmbar, die entweder durch zusätzliche Knoten entlang den Rändern der Elemente oder durch die Definition eines zusätzlichen Knotenfreiheitsgrads in Form einer Knotenverkrümmung realisiert werden.

Zusätzliche Randknoten erschweren den Aufbau eines einfachen FE-Netzes außerordentlich, insbesondere bei den meist höchst unregelmäßigen Grundrissen der Baupraxis. Der allgemeine Einsatz von Elementen mit zusätzlichen Randknoten ist dadurch eingeschränkt, dass sie sich nicht mit anderen Elementen kombinieren lassen, die ohne zusätzliche Randknoten auskommen. Zusätzliche Randknoten inflationieren die Zahl der algebraischen Unbekannten im Gesamtsystem und somit den Berechnungsaufwand.

Zusätzliche Knotenfreiheitsgrade in Form von Knotenverkrümmungen, die zur Erweiterung der Ansatzfunktionen oder zur Erfüllung der Interelementkompatibilität eingeführt werden, erschweren die Integration dieser Elemente in standardisierte FE-Programme, da generell für alle Knoten die Eigenschaft des Krümmungsfreiheitsgrades vorgehalten werden muss. Die Kopplung von Elementen unterschiedlicher Material- oder Querschnittseigenschaften durch Knoten mit übereinstimmender Verkrümmungseigenschaft verletzt die Stetigkeit der Momente und damit das Gleichgewicht.

Bei der Formulierung höher gradiger Ansatzfunktionen muss in der Regel auf die Vollständigkeit der Polynomansätze verzichtet werden. Vollständige Polynome, in denen die Koordinaten in allen Potenzen und Kombinationen vorkommen, haben die Eigenschaft der Isotropie. Elemente mit isotropen Ansätzen haben immer den Vorteil, dass sie in verzerrten Formen bessere Ergebnisse liefern.

Ein grundsätzlicher Nachteil der Plattenelemente mit reinen Verschiebungsansätzen besteht weiter darin, dass die Schnittmomente und -querkräfte aus den zweiten bzw. dritten Ableitungen der Verschiebungen berechnet werden müssen. Für finite Elemente bedeutet dies, dass sich die Momente und Querkräfte aus zweiten und dritten Differenzen der Knotenverschiebungen ergeben. Bei solchen Differenzenbildungen tritt ein so starker Genauigkeitsverlust auf, dass zumindest die Berechnung der Querkräfte in der Regel nicht mehr sinnvoll ist.

Aus Sicht der Baustatik ist es wünschenswert, dass die eingesetzten finiten Elemente so einfach wie nur möglich sind. Sie sollten für jeden Elementtyp nur die für die Elementform erforderliche Anzahl von Eckknoten besitzen. Die Schwierigkeiten beim Aufstellen zulässiger Verschiebungsfelder können vermieden werden, wenn man zum Prinzip der Komplementärenergie greift, bei denen bei der Auswahl des Spannungsfeldes nur geringe Schwierigkeiten auftreten.

3 Prinzip vom Minimum der komplementären Energie

Zur Entwicklung hybrider Elemente geht man von der komplementären Energie in der folgenden Form aus [6]. Mit der komplementären Verformungsenergie

$$U^* = \frac{1}{2} \iint m^T E^{-1} m \, dx \, dy = \frac{1}{2} \frac{12}{Et^3} \iint [m_x^2 - 2m_x m_y + m_y^2 + 2(1 + \nu)m_{xy}^2] \, dx \, dy$$

und dem Potenzial der äußeren Querbelastung und der Randlasten längs des Randes s

$$V^* = - \iint \hat{q} w \, dx \, dy - \int_s (\hat{q}_n w + \hat{m}_{ns} \theta_s + \hat{m}_n \theta_n) \, ds$$

beträgt die gesamte komplementäre Energie

$$P^* = U^* + V^*.$$

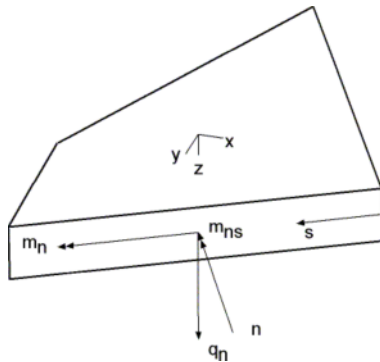


Abb. 4: Randschnittgrößen

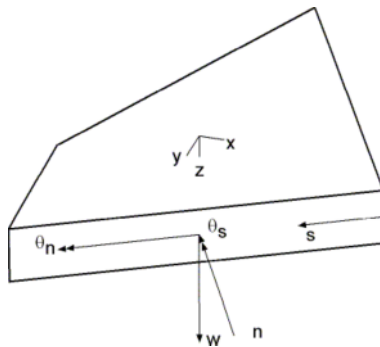


Abb. 5: Randverschiebungsgrößen

Wie oben beim Gesamtpotenzial lässt sich auch hier mit der ersten Variation $\delta \Pi^* = 0$ und der zweiten Variation $\delta^2 \Pi^* > 0$ zeigen, dass sich im Fall der kinematischen Verträglichkeit unter allen kinetisch zulässigen Spannungszuständen das Gleichgewicht so einstellt, dass das komplementäre Potenzial Π^* den kleinsten Wert annimmt.

3.1 FE-Diskretisierung

Bei hybriden Elementen werden Verschiebungsansätze nur entlang der Elementränder definiert [7]. Die Randverschiebungsgrößen

$$u_c = u_c(s) = \begin{bmatrix} w \\ \theta_s \\ \theta_n \end{bmatrix} \text{ mit der Randkoordinate } s$$

werden mit Hilfe der Polynomansätze $N_c = N_c(s)$ als Funktion der Knotenfreiheitsgrade q ausgedrückt,

$$u_c = N_c q .$$

Im Innern der Elemente werden Ansatzfunktionen für die Momente nach Gl. (5) formuliert,

$$m = B\beta + m_{\hat{q}} .$$

Darin ist m der Momentenvektor nach Gl. (5), $B = B(x,y)$ die Matrix der Ansatzpolynome und β der Vektor der freien Momentenparameter. $B\beta$ muss die homogene Gleichgewichtsbedingung Gl. (9) der unbelasteten Platte erfüllen. Das Momentenfeld $m_{\hat{q}} = m_{\hat{q}}(x,y)$ berücksichtigt die verteilte Querbewlastung $\hat{q} = \hat{q}(x,y)$ und muss so bestimmt werden, dass es mit dieser im Gleichgewicht steht.

Mit der Transformationsmatrix $\theta_c = \theta_c(s)$ zwischen den x,y -Kordinaten im Elementinneren und den n,s -Kordinaten des Randes legt der Momentenansatz (hier ohne den partikulären Anteil) auch die Randschnittgrößen fest,

$$t_c = \begin{bmatrix} q_n \\ m_{ns} \\ m_n \end{bmatrix} = q_s m = q_s B \beta = B_c \beta$$

Mit Hilfe der oben genannten Spannungs- und Verschiebungsansätze kann die komplementäre Energie als Funktion der Momentenparameter β und der Knotenfreiheitsgrade q angegeben werden. Ohne den Beitrag der partikulären Lösung $m_{\hat{q}}$ ergibt sich

$$P^* = \frac{1}{2} \beta^T H \beta - \beta^T G q \text{ mit } H = \iint B^T E^{-1} B dx dy \text{ und } G = \int_s B_c^T N_c ds .$$

Die notwendige Minimumsbedingung

$$\delta \Pi^* = 0 = \frac{\partial \Pi^*}{\partial \beta} \delta \beta$$

liefert die Momentenparameter als Funktion der Knotenfreiheitsgrade

$$\beta = H^{-1} G q$$

Damit lässt sich die komplementäre Energie allein als Funktion der Knotenfreiheitsgrade angeben,

$$P^* = -\frac{1}{2} q^T K q \text{ mit Elementsteifigkeitsmatrix } K = G^T H^{-1} G$$

3.2 Hybride Elemente

Wie aus obiger Darstellung der komplementären Energie zu erkennen ist, lassen sich die unbekanntenen Spannungsparameter β nach außen, d.h. im globalen System, vollkommen als Funktion der Knotenfreiheitsgrade ausdrücken. Obwohl im Innern der hybriden Elemente das Prinzip der komplementären Energie verwendet wird, gilt im Gesamtsystem das Prinzip

der potenziellen Energie. Dieser Vorteil erlaubt es, dass sich hybride Elemente problemlos in allgemeine FE-Programme zusammen mit Verschiebungselementen integrieren lassen.

Die Randverschiebungsansätze werden mit Hilfe der Freiheitsgrade der Anfags- und Endknoten eines Elementrandes formuliert. Im Programm PLT wird die Durchbiegung w des Randes durch ein vollständiges Polynom dritter Ordnung definiert. Daraus folgt ein quadratischer Ansatz für die Randverdrehung θ_s . Für die unabhängige Querschnittsneigung θ_n bleibt ein linearer Ansatz. Damit ist die kinematische Kompatibilitätsbedingung einfach und anschaulich erfüllt.

Der wesentliche Vorteil der hybriden Elemente gegenüber den Verschiebungselementen besteht darin, dass der Momentenansatz zunächst völlig unabhängig vom Randverschiebungsansatz gewählt werden kann. Bei Verschiebungselementen führen die schwierigen Anforderungen an die kinematischen Verträglichkeitsbedingungen zu sehr komplizierten Verschiebungsansätzen. Dies bedingt, dass innerhalb eines Elementes die zweiten Ableitungen und damit die Momente so stark variieren, dass eine Auswertung an einem beliebigen Punkt und insbesondere eine Berechnung der Querkraft aus den dritten Ableitungen meist nicht mehr sinnvoll ist. Bei hybriden Elementen können dagegen einfache lineare oder quadratische Ansätze verwendet werden, die die oben genannten Nachteile vermeiden.

Im Programm PLT wird jede einzelne Momentenkomponente durch einen Ansatz aus vollständigen quadratischen Polynomen definiert. Diese Ansätze führen auf äußerst einfache Ausdrücke, die sich zusätzlich noch explizit, d.h. ohne numerische Integration, integrieren lassen. Die vollständigen Polynomansätze garantieren zusätzlich eine gute Robustheit gegen Elementverzerrungen.

Ein weiterer Vorteil des Momentenansatzes besteht darin, dass sich der Bettungsdruck einer elastisch gebetteten Fundamentplatte durch zusätzliche Spannungsparameter sehr einfach berücksichtigen lässt.

Sobald die Knotenverschiebungen \mathbf{q} des Gesamtsystems bekannt sind, lassen sich daraus rückwärts die Momentenparameter β bestimmen. Im Unterschied zu den Verschiebungselementen kann damit der Momentenzustand an jedem beliebigen Punkt des Elements direkt, d.h. ohne Ableitungen, angegeben werden. Ein weiterer Vorzug besteht dabei darin, dass die Ergebnisse verschiedener Punkte ohne Unterschied der Genauigkeit ermittelt werden. Die hybriden Elemente stellen somit gegenüber den reinen Verschiebungselementen und im Hinblick auf die Anforderungen der Baustatik einen entscheidenden Fortschritt dar.

4 Literatur

- [1] S. Timoshenko und S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill, 1969 (2. Ausgabe)
- [2] J.N. Reddy: Energy and Variational Methods in Applied Mechanics. New York: John Wiley, 1984
- [3] T.J.R. Hughes: The Finite Element Method. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc., 1987
- [4] K.J. Draper und B.M.R. Irons: Inadequacy of Nodal Connections in a Stiffness Solution for Plate Bending. AIAA Journal (1965), vol. 3, pp. 961-965
- [5] R.H. Gallagher: Finite-Element Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc., 1975
- [6] O.C. Zienkiewicz und R.L. Taylor: The Finite Element Method, Volume 1. London: McGraw-Hill, 1977 (3. Ausgabe)
- [7] T.H.H. Pian: Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distribution. AIAA Journal (1964), vol. 2, no. 5, pp. 1333-1336
- [8] T.H.H. Pian und P. Tong: Basis of Finite Element Methods for Solid Continua. Int. J. Num. Meth. Eng. (1969), vol. 1
- [9] P. Tong und T.H.H. Pian: A Variational Principle and the Convergence of a Finite Element Method Based on Assumed Stress Distribution. Int. J. Solids Structures (1969), vol. 5
- [10] H.M. Hilber und D.W. Scharpf: Implementierung und Anwendung von hybriden Plattenelementen. KfK-CAD 120, Karlsruhe, 1979